

Title	代数方程式の根の限界に関する掛谷の問題について
Author(s)	小倉, 久雄
Citation	全国紙上数学談話会. 2(15) p. 538-p. 541
Issue Date	1949-07-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75296
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

161. 代数方程式の根の限界に関する掛谷の問題について.

長岡高校 小倉久雄

数学論文集、雑誌(共立社)に清水次雄氏の論文「代数方程式の根の限界について」があります。その中に次の事が附加されている。

「 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ の係数が悉く正の実数にて $a_1 > a_0$, $a_2 > 2a_1$, $a_3 > 2(a_2 - a_1) + a_1$, $a_4 > 2(a_3 - a_2) + a_2$, \dots , $a_{n-1} > 2(a_{n-2} - a_{n-3}) + a_{n-3}$, $a_n > 2(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-2}$ なる条件がありとせば $f(x) = 0$ の根の限界は如何なるべきか。

此の問題は、現在橋谷氏によって提出せられているが未だ興味ある真の限界が得られていない。言々……

この問題について拙解を述べて見ます。御高評を頂ければ幸いです。証明を述べるに当って、次のよく知られた定理を用えます。

(定理) 実方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ の係数が正ならば根は $\gamma = |x| = \gamma'$ なる円輪の内にある。但し γ, γ' は

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \dots, \frac{a_0}{a_1}$$

の中の最小値及最大値である。

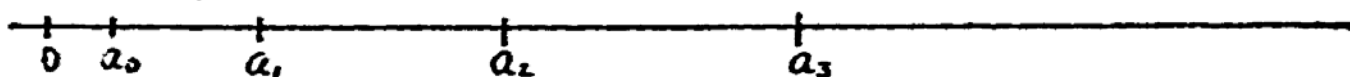
I. さて、橋谷の問題の条件を

$$a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2} > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

但し $a_{-1} = 0$ と定める。と書けば

$$a_0 < a_1 - a_0 < a_2 - a_1 < \dots < a_n - a_{n-1}$$

図示すれば



右に進むにつれて 間隔が広くなる。

$$a_0 < a_i - a_{i-1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{又、} \quad a_n \geq a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{之より} \quad \frac{a_0}{a_n} < \frac{a_i - a_{i-1}}{a_i}$$

$$\text{故に} \quad \frac{a_{i-1}}{a_i} < 1 - \frac{a_0}{a_n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

従つて $1 - \frac{a_0}{a_n}$ は、次の各分數より大である。

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \dots \quad (1)$$

$f(x) = 0$ の根を x とすれば

$$|x| < 1 - \frac{a_0}{a_n}$$

$$\text{又 } a_0 \leq a_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$a_n \geq a_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

i の同じ値に対して同時に
等号をとることはない

$$\text{故に } \frac{a_0}{a_n} < \frac{a_{i-1}}{a_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

依って $\frac{a_0}{a_n}$ は (1) の何れよりも小である。

$$\text{故に } \frac{a_0}{a_n} < |x| < 1 - \frac{a_0}{a_n}.$$

II. 根の条件の不等式を逆にした

$$a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2} \leq 0. \quad i=2, 3, \dots, n$$

が成立するとき 根の限界は どうなるであろうか。

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}}{a_n a_{n-1}}$$

$$\text{仮定によれば } 2a_{n-1} \geq a_n + a_{n-2} \quad \therefore a_{n-1} \geq \frac{a_n + a_{n-2}}{2}$$

$$\text{依って } a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} \geq \left(\frac{a_n + a_{n-2}}{2}\right)^2 - a_n a_{n-2} = \left(\frac{a_n - a_{n-2}}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\text{故に } \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$\text{同様にして } \frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \geq \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}} \geq \dots \geq \frac{a_0}{a_1}$$

$$\text{依って 定理により } \frac{a_0}{a_1} \leq |x| \leq \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

以上を纏めて次の結果を得る。

$$\text{方程式 } a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

の係数が正であって、

$$a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2} > 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (a_{-1}=0)$$

$$\text{ならば根は } \frac{a_0}{a_n} < |x| < 1 - \frac{a_0}{a_n}$$

なる円輪の内にあり、

$$a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2} \leq 0 \quad i=2, 3, \dots, n$$

$$\text{ならば根は } \frac{a_0}{a_1} \leq |x| \leq \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

なる円輪の内にある。

注意. 問答氏の条件の初めの二つの式

$$a_1 > a_0, \quad a_2 > 2a_1$$

は $a_1 > 2a_0$, $a_2 > 2a_1 - a_0$ としないと第三以下の式と形が異なる可能性がある。

次に 最初にあげた引用 定理の証明は 次のようにしてはどうでしょうか。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \dots (1)$$

(1) に $(x-K)$ をかけて

$$(x-K) f(x) = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - K a_n) x^n + (a_{n-2} - K a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 - K a_1) x - a_0 K = 0 \dots (2)$$

方程式 (2) の根の限界は次の方程式の根 (唯一つの正根) K によって与えられる。

$$a_n x^{n+1} - a_{n-1} - K a_n | x^n | a_{n-2} - K a_{n-1} | x^{n-1} | \dots$$

$$\text{今 } a_{n-1} - K a_n \leq 0, \quad a_{n-2} - K a_{n-1} \equiv 0, \dots, \quad a_0 - K a_1 | x - a_0 K = 0 \text{ と}$$

$$a_0 - K a_1 \leq 0 \dots (4)$$

(4) を満足するとき (3) と (2) とは同一の式となる。

即ち (2) は $x=K$ なる唯一つの正根を有する。即ち $K=1/0$

(2) の根は半径 K なる円の中にある。従って (1) の根も亦 半径 K なる円の中にある。

$$(4) \text{ を書換えると } \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq K, \quad \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \equiv K, \dots, \frac{a_0}{a_1} \leq K.$$

$$\text{従って } \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \dots, \frac{a_0}{a_1} \text{ の最大値を } K \text{ に選べば}$$

之を半径とする円の内にある。

(1) の逆数 を根とする 方程式は

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \dots (5)$$

之について 前と同様に論ずれば

$$(5) \text{ の根の 絶対値は } \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

の最大値より小であるか 又は等しい 逆数で言えば (1) の根の絶対値は

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

の最小値に等しいか 又はそれより大である。

従って定理は証明された。

(4月2日)